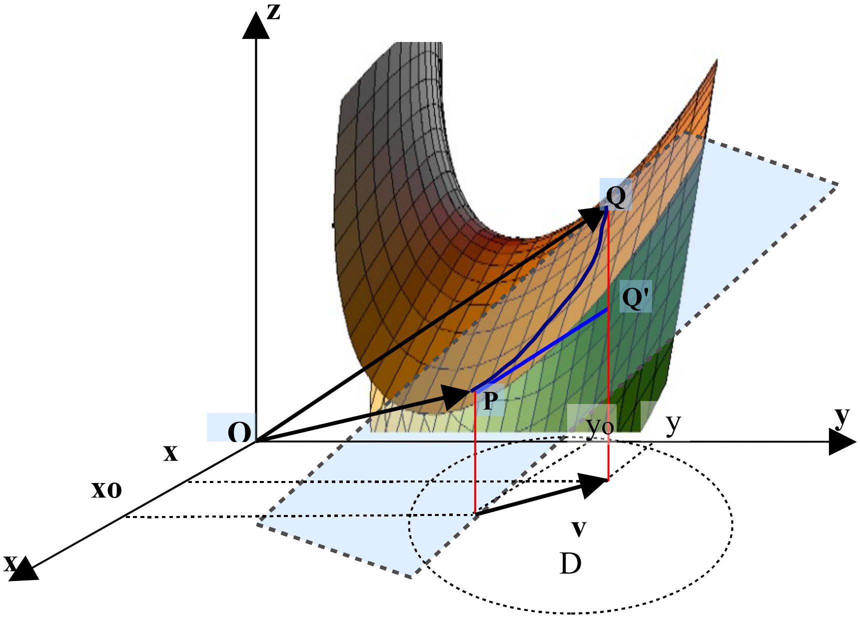
# Teorema de Aproximación Lineal (Diferenciabilidad)




Sea z = f (x, y) una función diferenciable en un abierto D c $\mathbf{R}^2$ ; también consideremos su plano tangente en **P.**

Desde el punto **P**(xo, yo, zo) pasamos a **Q** (x, y, z), siendo **Q'** su correspondiente sobre la vertical en el plano tangente; **Q'**(x, y, z'), donde z' es la ordenada en el plano tangente para **Q'**.

Es decir que $\overline{\mathbf{Q - Q'}}$ = (z – z') **k** , es un vector cuyo módulo es una medida de la diferencia de incrementos evaluados en la superficie y en el plano tangente.

El incremento de la función es: $\Delta z = f(x, y) - f(xo, yo)$ sobre la superficie. **(1)**

El incremento $\Delta z'$ sobre el plano tangente a partir de (xo, yo zo) es:

$\Delta z' = z' - zo = \partial f/\partial x\ (x - xo) + \partial f/\partial y\ (y - yo)$; **estas derivadas están evaluadas en xo, yo**.

**v** = (x-xo) **i** +(y-yo) **j** es el desplazameinto realizado en el dominio, causa de dichos incrementos.

$\overline{\mathbf{(P\text{-}O)}}$ = xo **i** + yo **j** + zo **k** = xo **i** + yo **j** + f(xo, yo) **k**

$\overline{\mathbf{(Q\text{ -}O)}}$= x **i** + y **j** + f(x, y) **k** (ecuación vectorial de la superficie)

$\overline{\mathbf{(Q'\text{ -}O)}}$= x **i** + y **j** + [f(xo, yo) + $\partial f/\partial x$ (x – xo) + $\partial f/\partial y$ (y – yo) ] **k** (ecuación vectorial del plano tangente)

$\overline{\mathbf{(Q\text{ -}P\ )}}$ **=** (x - xo) **i** + (y -yo) **j** + [f(x, y) - f(xo, yo)] **k** **(2)**

$\overline{\mathbf{(Q'\text{ - }P)}}$ **=** (x - xo) **i** + (y -yo) **j** + [$\partial f/\partial x$ (x – xo) + $\partial f/\partial y$ (y – yo)]**k** **(3)**

Ahora obtengamos la diferencia entre los vectores **(2)** y **(3)** que "mide" la discrepancia entre transitar (siguiendo **v)** sobre la superficie y hacer lo mismo sobre el plano tangente:

$\overline{\mathbf{(Q\text{ -}P\ )}}$ **-** $\overline{\mathbf{(Q'\text{ -}P)}}$ **= (** [f(x, y) - f(xo, yo)] - [$\partial f/\partial x$ (x – xo) + $\partial f/\partial y$ (y – yo)] ) **k** = $\epsilon$ (h, k) **k** **(4)**

Siendo $\varepsilon$(h, k) una función infinitésima de orden mayor que uno en h y k, además:

$h = (x - xo) = \Delta x$ y $k = (y - yo) = \Delta y$. Es decir que $€\,(h, k) \longrightarrow 0$ conforme $x \longrightarrow xo$, $y \longrightarrow yo$.

**¿Por qué decimos eso?**

De **(4)** se observa que siendo $\Delta z' = \left.\partial f/\partial x\right|_{(xo,\, yo)} (x - xo) + \left.\partial f/\partial y\right|_{(xo,\, yo)} (y - yo)$ una expresión lineal en $\Delta x$ y $\Delta y$, la diferencia que existe entre $\Delta z'$ y $\Delta z = f(x, y) - f(xo, yo)$ debe ser de orden mayor que uno, ésta es $€\,(h, k) = €\,(\Delta x, \Delta y)$.

Reordenando la **( 4)** y dejando de lado ya el versor **k** , se obtiene:

$$\boldsymbol{\Delta z = f(x, y) - f(xo, yo) = \left.\partial f/\partial x\right|_{(xo,\, yo)} \Delta x + \left.\partial f/\partial y\right|_{(xo,\, yo)} \Delta y + €\,(\Delta x, \Delta y)} \qquad \textbf{(5)}$$

*«Cuando el incremento de la función puede expresarse como la suma de una expresión lineal en los incrementos de las variables independientes más una función infinitésima de orden superior a la unidad en dichos incrementos, se dice que **la función es diferenciable**».*

Siendo $\Delta x$ y $\Delta y$ pequeños frente a la escala del problema, puede tomarse como una buena aproximación de $\Delta z$, la parte lineal $\left.\partial f/\partial x\right|_{(xo,\, yo)} \Delta x + \left.\partial f/\partial y\right|_{(xo,\, yo)} \Delta y$ que recibe el nombre de

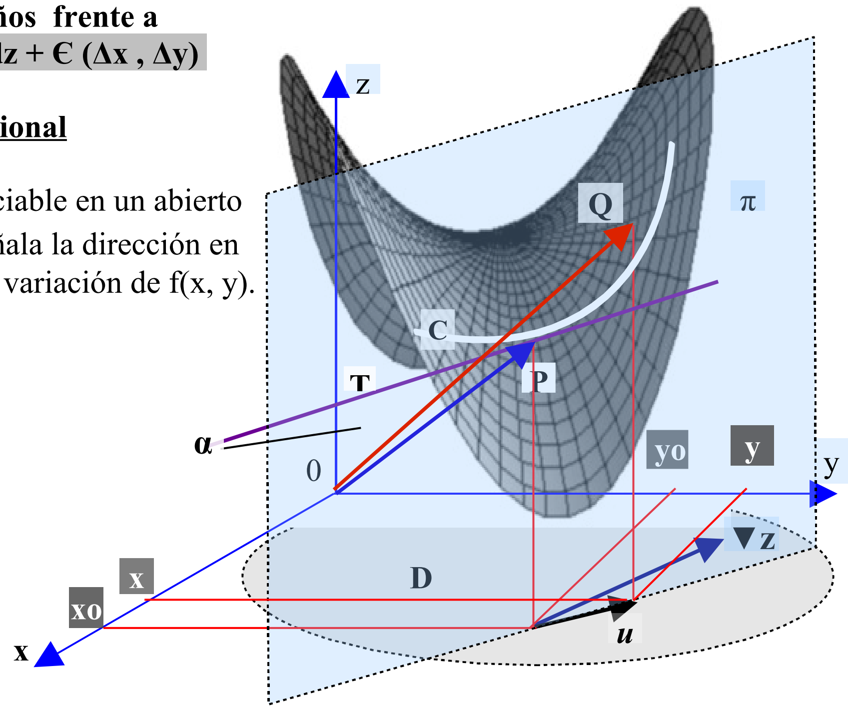
**diferencial total** de la función $z = f(x, y)$, y se la denota con:

$$dz = \left.\partial f/\partial x\right|_{(xo,\, yo)} \Delta x + \left.\partial f/\partial y\right|_{(xo,\, yo)} \Delta y = \langle \partial f/\partial x, \partial f/\partial y\rangle \cdot \langle \Delta x, \Delta y\rangle = \left.\nabla z\right|_{(xo,\, yo)} \cdot d\mathbf{r}: \quad \nabla z = \text{gradiente de } z \text{ (vector)}$$

**$\Delta z \approx dz$ si $\Delta x$ y $\Delta y$ son pequeños frente a la escala del problema**: **$\Delta z = dz + €\,(\Delta x, \Delta y)$**

## <u>Derivada Direccional</u>

Consideremos $z = f(x, y)$ diferenciable en un abierto $D \subset \mathbf{R}^2$. Sea $\boldsymbol{u}$ un vector que señala la dirección en que vamos a estudiar -desde **P-** la variación de $f(x, y)$.




Desde $P(xo, yo, zo)$ "caminamos" por la superficie siguiendo al vector $\boldsymbol{u}$ , es decir que nuestro andar se produce por la curva **C,** que surge de la intersección del plano vertical $\pi$ con la gráfica de $z = f(x, y)$, hasta $Q(x, y, f(x, y))$.

Como cualquier derivada, definimos la derivada de f según la dirección $\boldsymbol{u}$ como:

$$D_u f = \lim_{\|\boldsymbol{u}\| \to 0} (\Delta z / \|\boldsymbol{u}\|); \quad \text{Con } \Delta z = f(Q) - f(P)$$

Sea $\mathbf{r}(M) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + f(x, y)\,\mathbf{k}$, siendo M cualquier punto de la superficie dada por $z = f(x, y)$.

Estudiaremos la variación de $\mathbf{r}(M)$ sobre la curva C, según la dirección indicada por $\boldsymbol{u}$.

$$\mathbf{r}(Q) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + f(x, y)\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}(P) = x_o\,\mathbf{i} + y_o\,\mathbf{j} + f(x_o, y_o)\,\mathbf{k}$$

$$\boldsymbol{u} = (x - x_o)\,\mathbf{i} + (y - y_o)\,\mathbf{j} = \text{desplazamiento}$$

$$\|\boldsymbol{u}\| = h = \sqrt{(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2}$$

Entre P y Q la función experimenta una variación $\Delta z = f(x, y) - f(x_o, y_o) = f(Q) - f(P)$

Luego, observamos que: $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(Q) - \mathbf{r}(P) = (x - x_o)\,\mathbf{i} + (y - y_o)\,\mathbf{j} + [f(x, y) - f(x_o, y_o)]\,\mathbf{k}$

$$\lim_{h \to 0} \Delta\mathbf{r}/h = \lim_{h \to 0} [(x - x_o)/h\,\mathbf{i} + (y - y_o)/h\,\mathbf{j} + [f(x, y) - f(x_o, y_o)]/h\,\mathbf{k}] = D_{\boldsymbol{u}}\,\mathbf{r} =$$

$$= u_1\,\mathbf{i} + u_2\,\mathbf{j} + \lim_{h \to 0} [dz + \epsilon(\Delta x, \Delta y)]/h\,\mathbf{k} = u_1\,\mathbf{i} + u_2\,\mathbf{j} + \lim_{h \to 0} [\nabla z\big|_{(x_o, y_o)} . \boldsymbol{u} + \epsilon(\Delta x, \Delta y)]/h\,\mathbf{k}$$

**Con:** $u_1 = (x - x_o)/h = \cos\varphi$; $u_2 = (y - y_o)/h = \operatorname{sen}\varphi$; $\varphi$ = ángulo entre $\boldsymbol{u}$ y el eje de las abscisas.

( $u_1$ y $u_2$, entonces, son los cosenos directores de $\boldsymbol{u}^o$ )

En el límite, $\epsilon(\Delta x, \Delta y)] / h$, tiende a cero porque el orden del infinitésimo $\epsilon(\Delta x, \Delta y)$ es mayor que el de h; observe también que $\boldsymbol{u} / h = \boldsymbol{u}^o = u_1\,\mathbf{i} + u_2\,\mathbf{j}$, puesto que $u_1$ y $u_2$ son los cosenos directores de $\boldsymbol{u}^o$, el vector unitario.

Luego $D_{\boldsymbol{u}}\,\mathbf{r} = u_1\,\mathbf{i} + u_2\,\mathbf{j} + (\nabla z . \boldsymbol{u}^o)\,\mathbf{k}$. De aquí surge que siguiendo (desde P) la dirección

$\boldsymbol{u}^o = u_1\,\mathbf{i} + u_2\,\mathbf{j} = \cos\varphi\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\varphi\,\mathbf{j}$, la variación en $\mathbf{k}$, es $\nabla z . \boldsymbol{u}^o$.

La expresión $\nabla z . \boldsymbol{u}^o$ es la variación que experimenta la función en la dirección indicada por $\boldsymbol{u}$, por lo cual, la derivada direccional que buscábamos es:

$D_u f = \nabla z . \boldsymbol{u}^o = \boldsymbol{\partial f/\partial x \cos\varphi + \partial f/\partial y \operatorname{sen}\varphi}$; cada derivada parcial está evaluada en el punto bajo análisis.

**Interpretación geométrica:** $D_u f$ es numéricamente igual a la pendiente de la recta **T** tangente a la curva C en P; es decir $= \operatorname{tg}\alpha$.

Preparó: Eduardo Serdoch